Jakub Juránek, UČO 393110

6.1.B13
V euklidovském prostoru V jsou zadány dvě posloupnosti k vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$, resp. $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ takové, že pro $\forall i, j$ platí:

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0 \ \text{je-li} \ i \neq j \quad \wedge \quad \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_i \neq 0.$$

Dokažte, že potom vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ jsou lineárně nezávislé a vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ jsou též lineárně nezávislé.

Nejprve si uvědomme, že ze vztahu $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_i \neq 0$ plyne, že uvažované posloupnosti neobsahují nulový vektor a úvaha o jejich lineární nezávislosti má tedy smysl.

Uvažme rovnici:

$$t_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \cdots + t_k \cdot \mathbf{u}_k = \mathbf{o} \qquad (1)$$

kde $t_1, \dots, t_k \in T$.
Rovnici (1) postupně vynásobíme vždy jedním z vektorů $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ (korektní, neboť $\forall i : \mathbf{v}_i \neq \mathbf{o}$):

$$(t_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \cdots + t_k \cdot \mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{o} \cdot \mathbf{v}_1 \Rightarrow t_1 \cdot (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_1) + \cdots + t_k \cdot (\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v}_1) = 0 \overset{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0}{\Longrightarrow} t_1 \cdot (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_1) = 0 \overset{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_1 \neq 0}{\Longrightarrow} t_1 = 0$$

$$\vdots$$

$$(t_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \cdots + t_k \cdot \mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{v}_k = \mathbf{o} \cdot \mathbf{v}_k \Rightarrow t_1 \cdot (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_k) + \cdots + t_k \cdot (\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v}_k) = 0 \overset{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0}{\Longrightarrow} t_k \cdot (\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v}_k) = 0 \overset{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v}_k \neq 0}{\Longrightarrow} t_k = 0$$

Celkově tedy dostáváme, že rovnice (1) je splněna právě tehdy, když $t_1 = \cdots = t_k = 0$.
Vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ jsou tedy lineárně nezávislé.

Dále uvažme rovnici:

$$s_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + s_k \cdot \mathbf{v}_k = \mathbf{o} \qquad (2)$$

kde $s_1, \dots, s_k \in T$,
Nyní provedeme důkaz analogicky, jen místo postupného násobení vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ budeme rovnici (2) násobit vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ (korektní, neboť $\forall i : \mathbf{u}_i \neq \mathbf{o}$):

$$(s_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + s_k \cdot \mathbf{v}_k) \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{o} \cdot \mathbf{u}_1 \Rightarrow s_1 \cdot (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}_1) + \cdots + s_k \cdot (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{u}_1) = 0 \overset{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0}{\Longrightarrow} s_1 \cdot (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}_1) = 0 \overset{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}_1 \neq 0}{\Longrightarrow} s_1 = 0$$

$$\vdots$$

$$(s_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + s_k \cdot \mathbf{v}_k) \cdot \mathbf{u}_k = \mathbf{o} \cdot \mathbf{u}_k \Rightarrow s_1 \cdot (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}_k) + \cdots + s_k \cdot (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{u}_k) = 0 \overset{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0}{\Longrightarrow} s_k \cdot (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{u}_k) = 0 \overset{\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{u}_k \neq 0}{\Longrightarrow} s_k = 0$$

Celkově tedy dostáváme, že rovnice (2) je splněna právě tehdy, když $s_1 = \cdots = s_k = 0$.
Vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ jsou tedy též lineárně nezávislé.